

## APPENDICE B

## Stime di Schauder e disuguaglianza di Harnack

Consideriamo l'operatore

$$Lu(t, x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) D_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^N b_i(t, x) D_{x_i} u + c(t, x) u, \quad (\text{B.5})$$

e supponiamo che i coefficienti  $a_{ij}, b_i, c$  siano funzioni a valori reali definite in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Assumiamo che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad (\text{B.6})$$

per ogni  $x, \xi \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$  e per qualche costante  $\lambda > 0$ .

### B.1. Stime di Schauder interne

Assumiamo, oltre a (B.5), (B.6), che  $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ , per qualche  $\alpha \in (0, 1)$ , dove  $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  se e solo se  $\phi$  è limitata e soddisfa

$$[\phi]_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} := \sup_{\substack{(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ (t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)}} \frac{|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_2, x_2)|}{(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2})^\alpha} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo  $\|\phi\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} = \|\phi\|_\infty + [\phi]_{\frac{\alpha}{2}, \alpha}$ . Sia  $M > 0$  tale che

$$\|a_{ij}\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} + \|b_i\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} + \|c\|_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} \leq M,$$

per ogni  $i, j = 1, \dots, N$ .

Diremo che  $\phi \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  se e solo se  $\phi$  ammette derivate parziali rispetto a  $t$  fino al primo ordine e rispetto a  $x$  fino al secondo ordine, tutte limitate e inoltre

$$[\phi]_{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha} := [\phi_t]_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} + \sum_{i,j=1}^N [D_{x_i x_j} \phi]_{\frac{\alpha}{2}, \alpha} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo

$$\|\phi\|_{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha} = \|\phi\|_{\infty} + \|\phi_t\|_{\infty} + \|\nabla_x \phi\|_{\infty} + \|D_x^2 \phi\|_{\infty} + [\phi]_{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}.$$

L'interpretazione degli spazi di Hölder parabolici  $\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(Q)$ ,  $\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(Q)$ , con  $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ , e delle relative norme è quella usuale. Una volta stabilite le notazioni, possiamo enunciare le stime di Schauder interne (si vedano ad esempio [15, Capitolo 3, Sezione 2], [20, Teorema 8.11.1]).

**TEOREMA B.1.** *Siano  $Q_1 \subset Q_2$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Allora esiste una costante  $C > 0$  che dipende solo da  $N, \alpha, \lambda, M, Q_1, Q_2$  tale che per ogni  $u \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(Q_2)$  risulta*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(Q_1)} \leq C(\|u_t - Lu\|_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}(Q_2)} + \|u\|_{L^{\infty}(Q_2)}) \quad (\text{B.1})$$

## B.2. Disuguaglianza di Harnack parabolica

In questa sezione assumiamo che i coefficienti dell'operatore  $L$  siano funzioni misurabili tali che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2,$$

e

$$|b(t, x)| \leq \lambda^{-1}, \quad 0 \leq c(t, x) \leq \lambda^{-1},$$

dove  $b(t, x) = (b_1(t, x), \dots, b_N(t, x))$  e  $\lambda \in ]0, 1]$ . Se  $\theta, R > 0$ , poniamo

$$Q(\theta, R) = (0, \theta R^2) \times \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}.$$

Indichiamo infine con  $W_{N+1}^{1,2}(Q(\theta, R))$  lo spazio delle funzioni  $u = u(t, x)$  che appartengono a  $L^{N+1}(Q(\theta, R))$  insieme alle derivate deboli  $Du, D^2u, u_t$ . La seguente versione della disuguaglianza di Harnack si trova in [21, Teorema 1.1].

**TEOREMA B.2.** *Siano  $\theta > 1, R \leq 2, u \in W_{N+1}^{1,2}(Q(\theta, R))$ ,  $u \geq 0$  e  $u_t = Lu$  q.o. in  $Q(\theta, R)$ . Allora esiste una costante  $C > 0$ , dipendente solo da  $\theta, \lambda$  e  $N$  tale che*

$$u(R^2, 0) \leq C u(\theta R^2, x), \quad |x| \leq \frac{1}{2}R.$$

*Inoltre, la costante  $C$  resta limitata dal basso e dall'alto se  $(1 - \theta)^{-1}$  e  $\lambda^{-1}$  variano entro intervalli limitati.*